Brackets und Wellenfunktionen, Orts- und Impulsdarstellung

Gilt $|\Psi\rangle = \psi(x)$? Diese Fragestellung wollen wir nun etwas genauer untersuchen.

Wellenfunktion in Abhängigkeit vom Ort

$\psi(x)$ ist die Wellenfunktion; es ist die Lösung der Schrödinger Gleichung. Gemäß der üblichen Interpretation ist $|\psi(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeits*dichte* dafür, dass sich das Teilchen, dass durch $\psi(x)$ beschrieben wird, am Ort x aufhält. Das heißt, die *Wahrscheinlichkeit* $W(x_1, x_2)$ dafür, dass sich das Teilchen zwischen zwei Orten x_1 und x_2 befindet, ist

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, |\psi(x)|^2.$$

Aus diesem Grund sollte $\psi(x)$ normiert sein, sodass die Wahrscheinlichkeit $W(-\infty, \infty)$, dass sich das Teilchen an einem beliebigen Ort befindet, 1 ist:

$$W(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$$

(das haben wir in Aufgabe 10a nachgerechnet).

Wellenfunktion in Abhängigkeit vom Impuls

Wenn wir $\psi(x)$ fouriertransformieren, erhalten wir eine Funktion in Abhängigkeit von p. Lasst uns die „schöne“ Konvention der Fouriertransformation verwenden, bei der der Faktor $1/2\pi\hbar$ gleichmäßig auf Hin- und Rücktransformation aufgeteilt wird:

$$\tilde{\psi}(p) = (F\psi)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)\,, \qquad \psi(x) = \left(F^{-1}\tilde{\psi}\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ixp/\hbar}\, \tilde{\psi}(p).$$

Analog zu Aufgabe 9d finden wir, dass[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \tilde{\chi}^*(p)\, \tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \chi^*(x)\psi(x)$$

gilt. Für den Spezialfall $\chi = \psi$ folgt somit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \left|\tilde{\psi}(p)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1.$$

Dies legt nahe: Auch $\tilde{\psi}(p)$ dies ist eine Wellenfunktion, die das Teilchen beschreibt und gemäß der üblichen Interpretation ist $\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2$ die Wahrscheinlichkeits*dichte* dafür, dass das Teilchen, dass durch $\tilde{\psi}(p)$ beschrieben wird, den Impuls p hat. Das heißt, die *Wahrscheinlichkeit* $\tilde{W}(p_1, p_2)$ dafür, dass der Impuls des Teilchens irgendwo zwischen p_1 und p_2 liegt, ist

[1] Herleitung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \tilde{\chi}^*(p)\, \tilde{\psi}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, (\mathcal{F}\chi)^*(p)\, (\mathcal{F}\psi)(p) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ipx/\hbar}\chi(x)\right)^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ipx'/\hbar}\psi(x')\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp\, dx\, dx'}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x-x')/\hbar}\chi^*(x)\psi(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, dx'\, \delta(x-x')\chi^*(x)\psi(x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \chi^*(x)\psi(x).
\end{aligned}$$

$$\widetilde{W}(p_1, p_2) = \int_{p_1}^{p_2} dp\, \left|\tilde{\psi}(p)\right|^2.$$

Die Wahrscheinlichkeit $\widetilde{W}(-\infty, \infty)$, dass das Teilchen einen beliebigen Impuls hat, ist gemäß obiger Gleichung 1.

Zustände

$\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(p)$ beschreiben im Prinzip denselben Teilchenzustand: $\psi(x)$ seine Orts- und $\tilde{\psi}(p)$ seine Impulsabhängigkeit. Was, wenn wir nur *abstrakt* den *Zustand* des Teilchens beschreiben wollen? Wir interessieren uns nicht speziell für die Orts- oder für die Impulsabhängigkeit des Zustands, wollen aber dennoch den Zustand *an sich* irgendwie notieren. Dann benutzen wir $|\Psi\rangle$. $|\Psi\rangle$ ist keine Funktion, etwa von x oder p. Es ist einfach ein abstraktes Symbol für einen *Zustand* eines Teilchens. Viele Dinge lassen sich berechnen, ohne konkret die x- oder p-Abhnägigkeit des Zustands zu betrachten; stattdessen arbeiten wir auf der abstrahierten Ebene der Zustände. Gleichwohl kommt es dennoch vor, dass man Dinge berechnen möchte, für die man die konkrete Orts- oder Impulsabhängigkeit des Zustands braucht. Dann muss man sich eben dafür entscheiden, ob es geschickter ist in Orts- oder Impulsdarstellung, also mit $\psi(x)$ oder $\tilde{\psi}(p)$, zu rechnen. Wie hängt nun $|\Psi\rangle$ mit $\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(p)$ zusammen?

Wie könnten wir ein abstraktes Objekt wie $|\Psi\rangle$ mathematisch definieren? Versuchen wir es folgendermaßen: Wir haben in Aufgabe 9e gesehen, dass man für jeden Operator eine Orts- und Impulsdarstellung finden kann. In Aufgabe 9e haben wir zum Ortsoperator in Ortsdarstellung $X = x$ den Ortsoperator in Impulsdarstellung $\tilde{X} = i\hbar\, \partial/\partial p$ berechnet. Ebenso gibt es den Impulsoperator in Orts- und Impulsdarstellung: $P = -i\hbar\, \partial/\partial x$ bzw. $\tilde{P} = p$. Wenn wir mit abstrakten Zuständen $|\Psi\rangle$ arbeiten wollen, liegt es nahe, auch mit abstrakten Operatoren $\mathcal{X}, \mathcal{P}$ zu arbeiten.

Die Operatoren $X, \tilde{X}, P, \tilde{P}$ sind hermitesch, haben also Eigen*funktionen*, die orthonormal und vollständig sind. In Analogie dazu ist es eine naheliegende Annahme, dass $\mathcal{X}, \mathcal{P}$ Eigen*zustände* haben, die orthonormal und vollständig sind. Lasst uns den Eigen*zustand* von $\mathcal{X}$ mit Eigenwert x als $|x\rangle$ notieren und den Eigen*zustand* von $\mathcal{P}$ mit Eigenwert p als $|p\rangle$. Die Eigenwertgleichungen lauten dann

$$\mathcal{X}|x\rangle = x|x\rangle, \qquad \mathcal{P}|p\rangle = p|p\rangle.$$

Ebenso wie bei $|\Psi\rangle$ können wir prinzipiell die abstrakten Zustände $|x\rangle, |p\rangle$ in ihrer Orts- oder Impulsabhängigkeit angeben – dazu später mehr. Zunächst akzeptieren wir, dass es solche abstrakten Zustände gibt.

ENTWICKLUNGEN IN EIGENZUSTÄNDEN:

Unsere Annahme, dass $|x\rangle$ und $|p\rangle$ vollständig sind, liefert uns, dass wir jeden beliebigen Zustand $|\Psi\rangle$ in $|x\rangle$ oder $|p\rangle$ entwickeln können, in etwa so:

$$|\Psi\rangle = \sum_x a_x |x\rangle, \qquad |\Psi\rangle = \sum_p b_p |p\rangle.$$

Für die Orts- und Impulsdarstellungen des Orts- und Impulsoperators wissen wir jedoch, dass diese Operatoren kontinuierliche Eigenwerte und -funktionen haben. Also wollen wir das auch für die abstrakten Operatoren $\mathcal{X}, \mathcal{P}$ annehmen und daher die Summe lieber als Integral schreiben. Lasst uns außerdem die Koeffizienten wie folgt umbenennen: $a_x \to \psi(x)$ und $b_p \to \tilde{\psi}(p)$:

$$|\Psi\rangle = \int dx\, \psi(x)\, |x\rangle, \qquad |\Psi\rangle = \int dp\, \tilde{\psi}(p)\, |p\rangle.$$

Die zu diesen Ket-Zuständen gehörigen Bra-Zustände entwickeln wir wie folgt:

$$\langle\Psi| = \int dx\, \psi^*(x)\, \langle x|, \qquad \langle\Psi| = \int dp\, \tilde{\psi}^*(p)\, \langle p|.$$

An dieser Stelle ist absolut nicht ersichtlich, warum die Wellenfunktionen $\psi(x), \tilde{\psi}(p)$ hier als Entwicklungskoeffizienten auftauchen. Das wird allerdings in Kürze klar, wenn wir uns das Bracket-Objekt $\langle\Phi|\Psi\rangle$ ansehen.

BRACKETS VON ZUSTÄNDEN:

Wir haben oben (begründet) angenommen, dass die Eigenzustände $|x\rangle, |p\rangle$ jeweils orthonormal sind. Da sie kontinuierlich sind, können wir diese Orthonormalität als δ-Funktion schreiben:

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \qquad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p').$$

Wenn wir nun die Entwicklungen von $|\Psi\rangle$ in Eigenzuständen $|x\rangle$ in das Bracket $\langle\Phi|\Psi\rangle$ einsetzen, finden wir Folgendes:

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\Psi\rangle &= \left(\int dx'\, \phi^*(x')\, \langle x'|\right)\left(\int dx\, \psi(x)\, |x\rangle\right) = \int dx\, dx'\, \phi^*(x')\, \psi(x)\, \langle x'|x\rangle \\ &= \int dx\, \phi^*(x)\, \psi(x).\end{aligned}$$

Das ist offensichtlich *genau das*, was wir gerne hätten. Diese Identität ist die Begründung dafür, dass die Koeffizienten der Entwicklungen gerade die gewohnten Wellenfunktionen sind. Alles ist konsistent. Man kann obige Gleichung als Begründung dafür ansehen, warum $\langle\Phi|\Psi\rangle$ eine sinnvolle Notation für das Skalarprodukt im Funktionenraum ist.[1] Typischerweise unterscheidet man dabei nicht lästig zwischen den Symbolen Ψ und ψ bzw. Φ und ϕ.

Wir haben hier nun die Entwicklungen in $|x\rangle$ eingesetzt, aber natürlich können wir genauso gut die Entwicklungen in $|p\rangle$ einsetzen:

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\Psi\rangle &= \left(\int dp'\, \tilde{\phi}^*(p')\, \langle p'|\right)\left(\int dp\, \tilde{\psi}(p)\, |p\rangle\right) = \int dp\, dp'\, \tilde{\phi}^*(p')\, \tilde{\psi}(p)\, \langle p'|p\rangle \\ &= \int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{\psi}(p) = \int dx\, \phi^*(x)\, \psi(x).\end{aligned}$$

Den letzten Schritt haben wir in der Fußnote auf Seite 1 bereits hergeleitet. Wir können sogar $|\Psi\rangle$ in $|x\rangle$ und $\langle\Phi|$ in $\langle p|$ entwickelt einsetzen, also „gemischt":

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \left(\int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \langle p|\right)\left(\int dx\, \psi(x)\, |x\rangle\right) = \int dx\, dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \psi(x)\, \langle p|x\rangle.$$

Hier stoßen wir auf ein Problem: Was ist $\langle p|x\rangle$? Es wäre *schön*, wenn $\langle p|x\rangle = e^{-ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$ wäre. Denn dann *hätten* wir

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int dp\, \tilde{\phi}^*(p) \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x) = \int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{\psi}(p).$$

Wir werden unten noch weitere gute Gründe für die Annahme $\langle p|x\rangle = e^{-ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$ finden.

---

[1] Strenggenommen, muss man zwischen *Zustandsvektorräumen* mit „Vektoren" $|\Psi\rangle$ und *Funktionenvektorräumen* mit „Vektoren" ψ oder $\tilde{\psi}$ unterscheiden. Bei ersteren ist das Skalarprodukt $\langle\Phi|\Psi\rangle$, bei letzteren $\int dx\, \phi^*(x)\, \psi(x)$. Mit der korrekten Beziehung zwischen $|\Psi\rangle$ und ψ bzw. $\tilde{\psi}$ (nämlich den Entwicklungen in Eigenzuständen hermitescher Operatoren) sind diese beiden Skalarprodukte jedoch identisch. Daher unterscheidet man in der Regel nicht groß zwischen Zustandsvektorräumen und Funktionenvektorräumen.

Brackets aus Orts-/Impulseigenzuständen und beliebigen anderen Zuständen

Wir haben nun schon $\langle\Phi|\Psi\rangle$ betrachtet und auch schon einen gut begründeten Verdacht für das Aussehen von $\langle p|x\rangle$ geäußert. Was wir noch nicht betrachtet haben sind die Brackets $\langle x|\Psi\rangle$ und $\langle p|\Psi\rangle$. Das ist allerdings nicht weiter schwierig: Wenn wir die Entwicklungen $|\Psi\rangle = \int dx'\,\psi(x')\,|x'\rangle$ und $|\Psi\rangle = \int dp'\,\psi(p')\,|p'\rangle$ mit $\langle x|$ bzw. $\langle p|$ multiplizieren, finden wir

$$\langle x|\Psi\rangle = \int dx'\,\psi(x')\,\langle x|x'\rangle = \int dx'\,\psi(x')\,\delta(x-x') = \psi(x),$$

$$\langle p|\Psi\rangle = \int dp'\,\tilde{\psi}(p')\,\langle p|p'\rangle = \int dp'\,\tilde{\psi}(p')\,\delta(p-p') = \tilde{\psi}(p).$$

Diese Gleichungen haben eine gewisse Analogie im üblichen euklidischen Vektorraum.[1]

Setzen wir diese Formeln in die Entwicklungen ein, erhalten wir

$$|\Psi\rangle = \int dx\,\psi(x)\,|x\rangle = \int dx\,\langle x|\Psi\rangle\,|x\rangle = \int dx\,|x\rangle\langle x|\Psi\rangle,$$

$$|\Psi\rangle = \int dp\,\tilde{\psi}(p)\,|p\rangle = \int dp\,\langle p|\Psi\rangle\,|p\rangle = \int dp\,|p\rangle\langle p|\Psi\rangle.$$

Ein Vergleich der linken und rechten Seite dieser beiden Gleichungen zeigt uns, dass $\int dx\,|x\rangle\langle x|$ bzw. $\int dp\,|p\rangle\langle p|$ offensichtlich der 1-Operator sein muss. Nutzen wir den 1-Operator aus, indem wir ihn einfügen, finden wir

$$\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle = \int dp\,\langle x|p\rangle\langle p|\Psi\rangle = \int dp\,\langle x|p\rangle\,\tilde{\psi}(p),$$

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\Psi\rangle = \int dx\,\langle p|x\rangle\langle x|\Psi\rangle = \int dx\,\langle p|x\rangle\,\psi(x).$$

Diese Formeln erlauben uns das Umrechnen von $\psi(x)$ in $\tilde{\psi}(p)$ und umgekehrt. Aber $\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(p)$ sollen genau über die Fouriertransformation zusammenhängen! Damit die beiden Umrechnungen gerade Fouriertransformationen entsprechen, muss

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}, \qquad \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}$$

gelten. Dies deckt sich mit unserer obigen Annahme für das Aussehen von $\langle p|x\rangle$.

Zurück zu den Operatoren

Wir haben nun ausführlich den Zusammenhang zwischen $|\Psi\rangle$ und $\psi(x)$ sowie $\tilde{\psi}(p)$ beleuchtet. Um diesen Zusammenhang sinnvoll zu definieren, haben wir jedoch die Eigenzustände abstrakter Operatoren $\mathcal{X}$ und $\mathcal{P}$ gebraucht, die sowohl eine Korrespondenz im Ortsraum, X, P, als auch im

[1] Auch im euklidischen (endlich-dimensionalen) Vektorraum können wir jeden beliebigen Vektor $\vec{v}$ in einer orthonormalen Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ entwickeln:

$$\vec{v} = \sum_i v_i\,\vec{e}_i.$$

Wenn wir nun den Summationsindex in j umbenennen und mit $\vec{e}_i$ multiplizieren, finden wir

$$\vec{e}_i \cdot \vec{v} = \sum_j v_j\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_j v_j\,\delta_{ij} = v_i.$$

Wir können also den i-ten Entwicklungskoeffizient v_i als Skalarprodukt des Vektors $\vec{v}$ mit dem i-ten Basisvektor schreiben. Genauso haben wir im kontinuierlichen Fall den „x-ten“ Entwicklungskoeffizient $\psi(x)$ als Skalarprodukt des Zustands $|\Psi\rangle$ mit dem „x-ten“ Basisvektor $|x\rangle$ geschrieben:

$$\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle.$$

Impulsraum, $\tilde{X}, \tilde{P}$, haben. Wie sieht nun der Zusammenhang zwischen abstrakten *Operatoren* und deren Orts- und Impulsdarstellung aus?

Ähnlich wie bei den Zuständen postulieren wir einen Zusammenhang und begründen diesen dann anschließend dadurch, dass konsistent mit allem ist, was wir erwarten würden. Das Postulat lautet folgendermaßen:

$$\mathcal{O} = \int dx\, |x\rangle O \langle x| = \int dp\, |p\rangle \tilde{O} \langle p|,$$

wobei $\mathcal{O}$ ein abstrakter Operator im Zustandsraum ist, O seine Ortsdarstellung (ein Operator im Ortsraum) und $\tilde{O}$ seine Impulsdarstellung (ein Operator im Impulsraum). Diese Beziehung liefert uns

$$\mathcal{O}|\Psi\rangle = \left(\int dx'\, |x'\rangle O \langle x'|\right)\left(\int dx\, \psi(x)\, |x\rangle\right) = \int dx\, dx'\, |x'\rangle\, O\psi(x)\, \langle x'|x\rangle = \int dx\, |x\rangle\, O\psi(x),$$

$$\mathcal{O}|\Psi\rangle = \left(\int dp'\, |p'\rangle \tilde{O} \langle p'|\right)\left(\int dp\, \tilde{\psi}(p)\, |p\rangle\right) = \int dp\, dp'\, |p'\rangle\, \tilde{O}\tilde{\psi}(p)\, \langle p'|p\rangle = \int dp\, |p\rangle\, \tilde{O}\tilde{\psi}(p),$$

$$\mathcal{O}|\Psi\rangle = \left(\int dp\, |p\rangle \tilde{O} \langle p|\right)\left(\int dx\, \psi(x)\, |x\rangle\right) = \int dp\, |p\rangle\, \tilde{O} \int dx\, \psi(x)\, \langle p|x\rangle = \int dp\, |p\rangle\, \tilde{O}\tilde{\psi}(p)$$

sowie für Matrixelemente

$$\begin{aligned}\langle \Phi|\mathcal{O}|\Psi\rangle &= \left(\int dx\, \phi^*(x)\, \langle x|\right)\left(\int dx'\, |x'\rangle O \langle x'|\right)\left(\int dx''\, \psi(x'')\, |x''\rangle\right) \\ &= \int dx\, dx' dx''\, \phi^*(x)\, O\, \psi(x'')\, \langle x|x'\rangle\langle x'|x''\rangle = \int dx\, \phi^*(x)\, O\, \psi(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi|\mathcal{O}|\Psi\rangle &= \left(\int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \langle p|\right)\left(\int dp'\, |p'\rangle \tilde{O} \langle p'|\right)\left(\int dp''\, \tilde{\psi}(p'')\, |p''\rangle\right) \\ &= \int dp\, dp' dp''\, \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{O}\, \tilde{\psi}(p'')\, \langle p|p'\rangle\langle p'|p''\rangle = \int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{O}\, \tilde{\psi}(p).\end{aligned}$$

Wir wissen, dass wir per Fouriertransformation von $\psi(x)$ nach $\tilde{\psi}(p)$ und zurück kommen. Wie berechnen wir den Operator $\tilde{O}$, falls wir den Operator O schon kennen (und umgekehrt)? Nehmen wir die Ergebnisse der ersten beiden der drei obigen Gleichungen für $\mathcal{O}|\Psi\rangle$ und setzen $\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$ sowie $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\Psi\rangle$ ein, und setzen sie gleich, erhalten wir

$$\int dp'\, |p'\rangle \tilde{O} \langle p'|\Psi\rangle = \int dx\, |x\rangle O \langle x|\Psi\rangle.$$

Wir haben die Integrationsvariable p' genannt und multiplizieren nun mit $\langle p|$:

$$\tilde{O}\langle p|\Psi\rangle = \int dx\, \langle p|x\rangle O \langle x|\Psi\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{O}\tilde{\psi}(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\, O\psi(x).$$

Umgekehrt gilt

$$O\psi(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}\, \tilde{O}\tilde{\psi}(x).$$

Auf diese Weise haben wir in Aufgabe 9e $\tilde{X}$ und $\tilde{P}$ gefunden.

Eigenfunktionen von Orts- und Impulsoperator

Oben hatten wir $\psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$ gefunden: $\langle x|\Psi\rangle$ ist die Ortdarstellung des Zustandes $|\Psi\rangle$. Also sollte $\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$ die Ortsdarstellung der Eigenzustände des Impulsoperators (in Ortsdarstellung) sein. Und tatsächlich:

$$P\langle x|p\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = p\langle x|p\rangle.$$

Ebenso ist $\langle p|x\rangle = e^{-ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$ die Impulsdarstellung der Eigenzustände des Ortsoperators (in Impulsdarstellung):

$$\tilde{X}\langle p|x\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = x\langle p|x\rangle.$$

Fouriertransformation von Zuständen

Obwohl ich oben begründet habe, warum *Zustände* $|\Psi\rangle$ abstrakte, darstellungsunabhängige Objekte sind, liegt es im Kontext von Orts- und Impulsdarstellung und Fouriertransformationen manchmal dennoch nahe, auch auf der Ebene von Zuständen zwischen $|\psi\rangle$ und $|\tilde{\psi}\rangle = F|\psi\rangle$ zu unterscheiden. Dabei wüsste ich persönlich allerdings nicht, wie die Fouriertransformation eines Zustandes sauber mathematisch definiert ist. Gleichwohl erlaubt diese Notation Dinge aufzuschreiben, wie etwa

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\, \psi(x) = \underbrace{\int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{\psi}(p)}_{=\langle\tilde{\phi}|\tilde{\psi}\rangle} = \underbrace{\int dp\, (F\phi)^*(p)\, (F\psi)(p)}_{\langle\mathcal{F}\phi|\mathcal{F}\psi\rangle}.$$

In diesem Sinne gilt also $\langle\phi|\psi\rangle = \langle F\phi|F\psi\rangle$, das heißt die Fouriertransformation F ist unitär, das heißt $F^{-1} = F^\dagger$.[1]

Wenn wir das ausnutzen, können wir die Umrechnung von O in $\tilde{O}$ wie folgt schreiben:

$$\tilde{O}\tilde{\psi}(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\, O\psi(x) = (FO\psi)(p) = (FOF^{-1}F\psi)(p) = FOF^{-1}\tilde{\psi}(p)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tilde{O} = FOF^{-1}.$$

Obwohl die Fouriertransformation von Zuständen *an sich* nicht sauber definiert ist, sondern nur im Kontext von Skalarprodukten bzw. Matrixelementen, können wir den Operator F nun ganz gewöhnlich durch Matrixelemente rumschubsen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\, O\, \psi(x) = \langle\phi|O|\psi\rangle = \langle\phi|F^{-1}FOF^{-1}F|\psi\rangle = \langle F\chi|FOF^{-1}|F\psi\rangle = \langle F\chi|FOF^{-1}|F\psi\rangle$$
$$= \langle\tilde{\phi}|\tilde{O}|\tilde{\psi}\rangle = \int dp\, \tilde{\phi}^*(p)\, \tilde{O}\, \tilde{\psi}(p).$$

Auf diese Weise haben wir die Formel, die wir in der Fußnote auf Seite 1 in vier Zeilen hergeleitet haben, nun fast als Einzeiler bewiesen.

[1] Man beachte, dass wir hier für die Hin- und Rücktransformation Faktoren $1/\sqrt{2\pi\hbar}$ gewählt haben. Für anderen Konventionen ist $\mathcal{F}$ nicht unitär, sondern, wie in Aufgabe 9, nur die Kombination $\mathcal{F}/\sqrt{2\pi\hbar}$.